

模块·知识与推理的根基·第 012 日

012

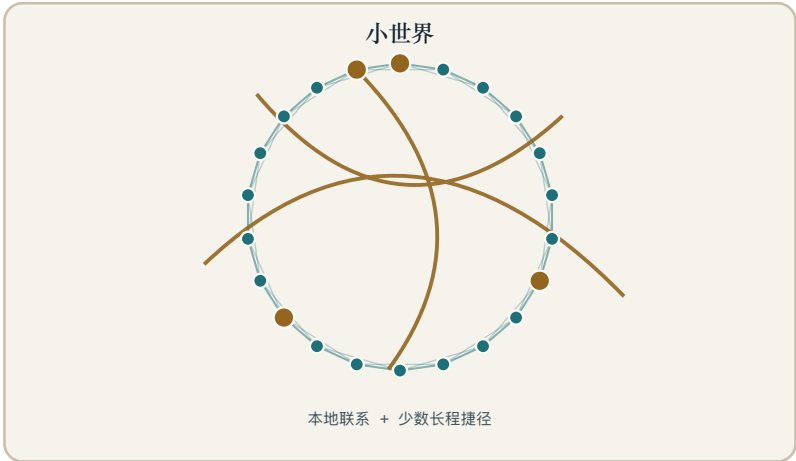
网络

地球另一端的陌生人，比你想象中更近。问题在于：为什么？

研究路线·轻装版

网络

地球另一端的陌生人，离你比想象中更近。问题是：为什么？



密集本地联系加上少数长程捷径，足以把遥远节点拉到几个跳步之内。

1967 年冬，内布拉斯加州奥马哈市的几百人打开信箱，发现了一封古怪的邀请。信封里装着一本小册子和一个人的姓名：一位住在约 1,800 千米外、马萨诸塞州沙伦镇的股票经纪人。规则奇特却简单：把小册子送到他手中。你不能直接寄给他，只能交给一位彼此直呼其名的熟人，而且你认为此人更可能认识目标，或认识某位认识目标的人。

面对一个与自己毫无瓜葛的陌生人姓名，多数人想必觉得这项任务毫无希望：要靠朋友把东西从内布拉斯加送到波士顿？然而，小册子开始抵达股票经纪人的办公室。其中一条完成的链只经过两位中间人；所有完成的链平均经过约五位中间人。社会心理学家斯坦利·米尔格拉姆就此完成了二十世纪最著名的实验之一，也让一句话深入大众文化：「六度分隔」。这个数字为何如此之小、那项著名估计为何必须附上一项重要限定，以及相关数学能揭示哪些关于大脑与流行病的规律，正是今天的问题。

当前位置

我们用一种把其余工具连接起来的结构，为模块一收尾。第 8 日介绍了自组织临界性，以及行为横跨多个尺度的系统；第 9 日展示了反馈回路如何把微小推动放大成失控变化。网络为这些观念画出接线图：有关标度的主张描述连接如何分布，传染则是在这些连接上运行的增强过程。还要带上第 5 日对相关关系的警惕、第 7 日的比特，以及昨日第 11 日的提醒：面对整齐的模式，心智可能过于急切地去匹配。四样工具，今天都用得上。

细看开场故事

那个名声大噪的数字

先理清算术，因为它关系到后文的一切。在完成的链中，米尔格拉姆的小册子平均经过 5.2 位中间人。这里说的是目标与起始者之间的人，而不是转手次数。中间有五个人，就意味着链上大约有六条连接，故而称为「六度」。区分「中间有几人」与「经过几条连接」，在此后的每项研究中都会再次出现，先牢牢记住。

米尔格拉姆 1967 年在 *Psychology Today* 发表了通俗报道，完整研究则于 1969 年刊登在 *Sociometry*。著名的 5.2 必须附上一项重要限定：研究招募了 296 名起始者，但只有 217 人把小册子继续传出，最终仅 64 条链抵达目标。也就是说，实际启动的链中约 29% 完成；若以全部招募者为分母，则约为 22%。报告的均值只描述了最终完成的少数链。有人拒绝转交时便中断的链，或许本来会更长、更曲折。心理学家朱迪思·克莱因费尔德 2002 年重新分析数据时还强调了选择问题：许多起始者之所以入选，是因为自称人脉广；另一些人持有股票，因而格外可能找到通往股票经纪人的路径。更准确的标题应是：「在经过筛选且最终完成传递链的参与者中，世界显得很小时。」不那么上口，却仍然令人惊叹。

这究竟是谁的想法？

这句话不是米尔格拉姆首创，观念也并非由他最先提出。1929 年，匈牙利作家弗里杰什·考林蒂在短篇小说 *Láncszemek*（《链环》）中，让一个人物打赌：地球上的任何两个人，最多通过五位熟人就能连接起来。「六度分隔」一语则晚得多，来自约翰·瓜尔 1990 年的同名戏剧，继而进入更广泛的大众文化。一位作家的赌约、一位剧作家的标题，中间夹着一项心理学实验：在人们有能力大规模检验之前，这个数字便已声名远扬。

那么，它是真的吗？后来的大型数字图确实发现了短路径，尽管这些研究测量的是特定服务上的成员关系与通信，而不是全体人际关系的随机样本。2008 年，尤雷·莱斯科韦茨与埃里克·霍维茨分析了 Microsoft Messenger 图：1.8 亿人、13 亿条连接，一个月内产生 300 亿次对话。连通节点对之间的平均距离为 6.6 跳，众数为 6，中位数为 7。2012 年，Facebook 与米兰大学团队分析了 7.21 亿名用户和 690 亿条好友连接。该服务上的平均距离为 4.74 条连接，即约 3.74 位中间人。他们把论文命名为 *Four Degrees of Separation*。这些规模庞大的观察性图支持小世界模式；但它们本身既不能确立一个适用于所有人的永恒数字，也不能证明某个平台真的让整个个人类世界变小了。

模型

两者兼得：既聚集，又很短

小世界真正奇特的地方，远不止讨喜，而在于下面这个难题。你的朋友并不是随机散落在全人类中。他们会聚集：你的朋友往往彼此也认识。真正能收到你小子的人，多半住在附近、与你共事，或生活在相同的圈子里。这称为聚集性¹。高聚集性理应将人困在狭小的本地口袋里，像一个村庄。为什么世界没有成为一片片彼此隔绝的村落，任何两个村落之间都要转手上百次？

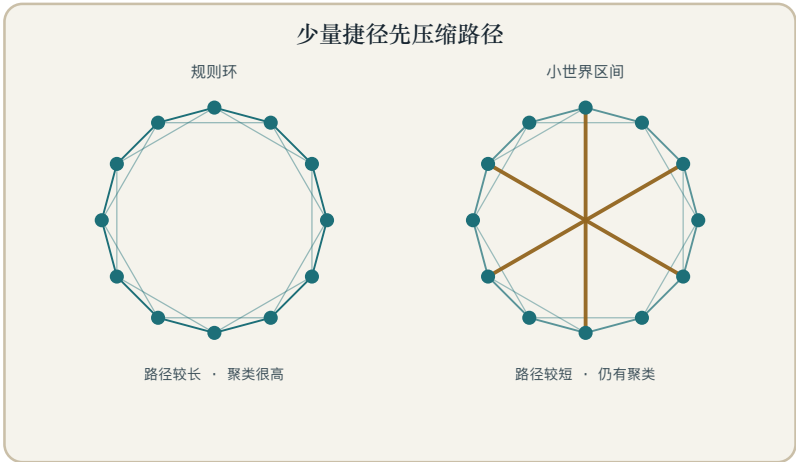
邓肯·瓦茨与史蒂文·斯特罗加茨在 1998 年发表于 *Nature* 的里程碑论文中给出的答案，漂亮得近乎出奇简单。先从一个村落世界开始：所有人排列成环，只与近邻相连。它聚集性很高，路径却极长；若要横穿整个环，只能沿着连接一步步爬过去。现在，把极少数本地关系随机重连为跨越结构的长程捷径。聚集性几乎不受损，因为绝大多数人的朋友仍彼此相识；捷径却像虫洞一样，使网络的平均距离骤降。大学室友移居海外、表亲身处三个时区之外，这样少数几条远距离关系，就足以把数十亿「村民」缝合成一个小世界。瓦茨与斯特罗加茨把这类结构称为小世界网络：它兼具村庄式的小圈子与随机图的广阔通达性。

下方展项展示瓦茨—斯特罗加茨模型。移动滑块，可以看到平均路径长度的下降远快于聚集性的消退。

¹聚集性衡量一个节点的邻居彼此相连的频繁程度。

图·重连一个小世界

少数长程捷径便能显著减少横穿环形网络所需的跳数，同时保留大多数本地三角形。局部聚集性尚未消失，短路径便已经出现。



从规则环到小世界，平均路径长度会先快速下降，而聚类系数下降得更慢。

网络状态	平均路径长度	聚集性	解读
局部环	高	高	村落关系保留本地三角形，但横穿网络需要许多跳。
少数连接重连	急剧下降	仍高	小世界区域兼具局部凝聚力与全局通达性。
多数连接随机	低	低	路径依然很短，但村落结构已基本消散。

深入模型

连接的民主制与贵族制

短路径只是现实网络运转方式的一半；另一半在于连接分布并不均等。数一数每个节点有多少条边，也就是它的度，再把答案绘成分布，就会出现两种截然不同的政治体制。

第一种是保罗·埃尔德什与阿尔弗雷德·雷尼在 1960 年前后研究的随机图：在节点间随机抛出边，仿佛醉汉在串节日彩灯。这里的度分布很民主。在 $G(n, p)$ 模型中，每个节点的度都服从二项分布；当网络趋于大规模、稀疏，且平均度保持不变时，

该分布趋近泊松分布²。因此，大多数节点的度都位于均值附近，极端枢纽极其罕见，而且这种分布有明确的特征尺度，可以指出一个典型节点。如果人类社会是这样的埃尔德什-雷尼图，几乎每个人的朋友数量都大致相同，只有少许浮动，也不会有名流。

第二种体制是贵族制，正是它使网络科学声名鹊起。1999 年，阿尔伯特-拉斯洛·巴拉巴西与雷卡·阿尔伯特指出，包括早期万维网、引文图和航空路线在内的许多现实网络，与节日彩灯截然不同。少数枢纽节点占据远超比例的连接，而多数节点只有很少的连接。它们的度分布看似按幂律³ $P(k) \propto k^{-\gamma}$ 衰减，这正是第 8 日也曾出现的尺度形状。此时没有唯一的典型节点或特征尺度，故称无标度。

巴拉巴西与阿尔伯特还提出了一种形成这种贵族制的机制：优先连接。让网络逐个增加节点，每个新来者都优先选择已经连接良好的节点。强者愈强；早期枢纽滚雪球般壮大。这就是马太效应——「凡有的，还要加给他」——化成了一张图。德里克·德·索拉·普赖斯在 1960 年代就从引文网络中发现了相关的「累积优势」过程；这种机制一再出现，因为相同的模式也一再出现。

下方展项把两种体制并列呈现。在线性坐标上，差异可能并不显眼；换成双对数图，差别便十分鲜明。图中还叠加了对数正态分布⁴。它是重要的相似候选：在现实数据覆盖的有限区间内，曲线可能只呈现轻微弯折。

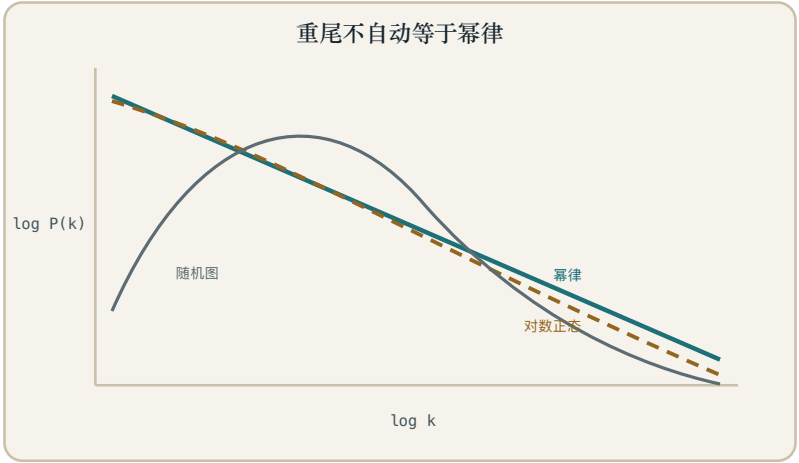
图·度分布

线性视图与双对数视图会揭示同一数据的不同部分。理想幂律在双对数坐标上是一条直线，但对数正态分布的尾部也可能在有限观测范围内显得相似。

²泊松分布描述以固定平均速率独立发生的事件所产生的计数。它可近似大规模稀疏的埃尔德什-雷尼图中的度：大多数节点的度位于均值附近，极端枢纽极其罕见。

³在幂律分布中，取值 k 的概率按 k 的某个固定幂次下降，因此会出现大量小值，以及由少数大值构成的长尾。

⁴如果一个量的对数服从正态分布，这个量便服从对数正态分布；在有限范围内，其长尾可能很像幂律。



双对数坐标能把幂律拉成直线，但有限范围内的对数正态尾部也可能十分相似；模型比较仍不可少。

候选模型	度的模式	双对数视图	推断限制
泊松随机图	大多数节点都位于某一特征度附近。	尾部迅速弯离。	大型枢纽极其罕见。
幂律	大量低度节点与很长的尾部并存。	理想幂律呈直线。	看似笔直的片段只是必要证据，并不充分。
对数正态	多数取值不大，但尾部看似很重。	在有限范围内可以模仿直线。	在称其为幂律之前，必须比较模型。

争论

网络真的无标度吗？一场大争论

进入 2000 年代后，「无标度」从一项有趣发现逐渐固化成近似自然定律的说法。教科书、演讲与数千篇论文描述万维网、细胞、大脑和社会时，仿佛一条幂律与一种优先连接叙事就能支配一切。这种统一令人振奋，却往往建立在一种薄弱习惯上：把度分布画在双对数坐标中，看见大致笔直，就宣称它是幂律。近似笔直不等于直线。数学形式与成因可能完全不同的对数正态分布，也能在多数数据集覆盖的范围里伪装成近似直线。

2019 年，这场争论在 *Nature Communications* 达到高潮。安娜·布罗伊多与阿龙·克劳塞特检验了社会、生物、技术和信息等领域的 928 个网络。他们采用了克劳塞特、科斯马·沙利兹和马克·纽曼十年前提出的统计程序：先用最大似然法拟合候选幂律，检验拟合是否可信，再与对数正态等其他候选模型比较。只有 4% 的网络达到了最强的无标度证据类别。对大多数网络而言，对数正态的拟合不逊于甚至优于幂律；作为典型范例的社会网络，按其判据充其量只有很弱的无标度证据。

「强无标度结构在经验上十分罕见。」 Broido & Clauset, Nature Communications

10:1017, 2019 年 3 月。

反驳很快出现，而且毫不让步。伊万·沃伊塔洛夫、德米特里·克里乌科夫等人在 *Physical Review Research* 发表 *Scale-free networks well done* 作为回应。他们认为，布罗伊多与克劳塞特要求的是纯粹的教科书式幂律，其判据对现实网络过于严格。按照他们的论证，无标度行为只需以正则变化这一数学性质渐近地出现在尾部。采用这种基于尾部的定义，他们发现无标度结构十分普遍。物理学家佩特·霍尔姆把同期综述命名为 *Rare and everywhere*：两派采用不同定义，因此回答的其实不是不同问题。

争论并未止于 2019 年。2021 年一项 PNAS 分析指出，有限尺寸效应可能让真正无标度的网络无法通过标准分类检验。2024 年一篇 PNAS Nexus 论文则提出了另一种机制，以数学方式展示一个并不增长的网络如何仅凭重连产生幂律尾部，并将模型与若干现实网络比较。两篇论文都不能证明所有网络都是无标度的；合起来看，它们说明必须把普遍程度、形成机制与统计定义分开讨论。

因此，截至 2026 年 7 月，合理结论不是某个单一且已定案的百分比。许多现实度分布确实是重尾的：枢纽存在，节点的度也比埃尔德什-雷尼图的预测悬殊得多。尚未确立的是：是否有一条指数介于 2 与 3 的普遍纯幂律支配所有这类网络，以及它们是否全由优先连接生成。更强的主张仍有争议，而结论部分取决于哪一种尾部行为有资格称为「无标度」。这正是第 8 日的模式在另一领域重现：一种有用的测量被扩张为普适叙事，又被更严格的统计比较拉回。它也与第 11 日遥相呼应：科学共同体一旦预期看到直线，暗示性的线条就很容易被看成直线。

这场争论为何值得进行

它并非单纯的用词之争。网络是否真正无标度，会改变人们对随机失效下的网络鲁棒性、枢纽定向攻击的破坏力，以及流行阈值位置的预测。这个标签承载着关键假设，因此必须凭明确的定义及与其他模型的比较来赢得。

前沿·2026

传染：枢纽为何能点燃世界

现在来看它的实际意义，也就能明白这个主题为何绝非博物馆里的旧展品。病毒、谣言、模因、银行挤兑和停电等一切传播过程，都沿着网络前进。网络的形状会与传播对象自身的生物学、行为或工程性质一道，支配整个过程。

经典流行病学有一个核心量 R_0 ：在特定条件下，一位典型感染者在完全易感人群中造成的预期二代病例数。以 $R_0 = 1$ 为界，低于此值时疫情通常会消退，高于此值时则可能增长。简单的阈值论证往往假定个体混合得相对均匀。现在，把易感-感染-易感模型⁵放到一种理想化、无相关、规模无限增长且度方差发散的无标度网络上，就会出现惊人结果。2001 年，罗穆阿尔多·帕斯托-萨托拉斯与亚历山德罗·韦斯皮尼亚尼证明，在这个极限中，流行阈值趋于消失：不存在一个严格为

⁵ 在 SIS 模型中，感染节点康复后重新变为易感，而非获得持久免疫，因此感染可以无限期循环。

正、足以保护该模型网络的传播阈值。枢纽如同储存库，会不断重新播种感染。有限的现实网络中，阈值并不真的为零；后续研究也把有限尺寸行为与最大枢纽及模型细节联系起来。经得住检验的结论更窄：接触异质性可以大幅降低阈值。

前沿 01 ● 度方差效应已确立

超级传播是网络的性质，不只取决于病原体

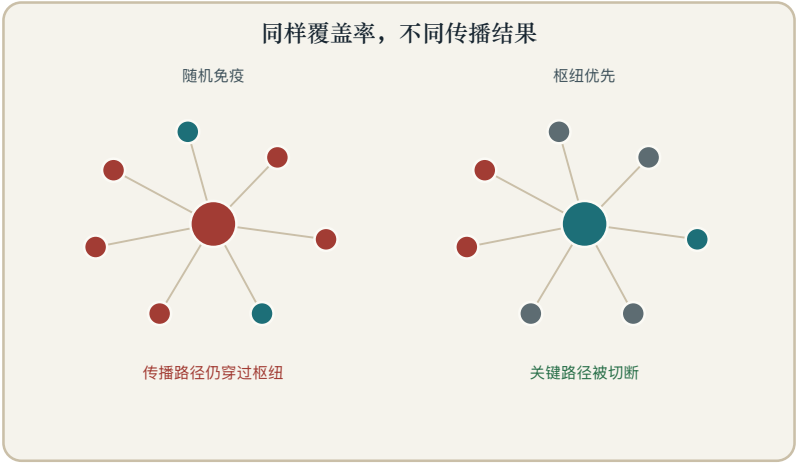
在上述 SIS 模型的异质平均场近似中，阈值随 $\langle k \rangle / \langle k^2 \rangle$ 缩放，即平均度除以度平方的均值。大型枢纽会抬高 $\langle k^2 \rangle$ ，从而压低阈值。换句话说，只知道平均接触数还不够；方差，尤其是连接极多的个人或事件所构成的分布远尾，可能主导传播。

这一结构有助于解释 COVID-19 疫情期间十分重要的超级传播现象：传播呈高度过度离散，少数病例与场所造成了很大一部分后续感染。网络位置不是唯一原因；传染性、时机、场所、行为和偶然性也都很重要。不过，即使平均再生数相同，如果一场疫情反复触达枢纽，另一场只在较均匀的接触模式中传播，二者的表现仍可能截然不同。分布的离散程度与中心位置同样重要，这直接呼应第 6 日。

反过来看，这项结果便成为一种干预思路。如果枢纽对维持传播贡献格外大，那么保护或移除这些节点，可能比随机选择相同数量的节点有效得多。在下方的风格化网络中，随机免疫 12% 的节点，会留下许多经过度较高节点的路线；优先免疫度最高的 12%，则移除了网络的主要通道。这是模型结果，并非普遍的疫苗政策。现实中的定向策略涉及测量、公平、隐私与可行性难题，而且生物风险也不等同于节点的度。

图·传染与枢纽定向干预

保护相同数量的节点，效果会因其所处位置而异。移除度较高的枢纽会同时切断许多传播路径；随机保护则往往让这些路径继续开放。



在这张教学网络里，随机免疫常会错过稀少枢纽；优先保护枢纽能切断更多潜在传播路径。结果依赖网络和传播参数。

策略	受保护节点	结构效应	模型结果
无	0%	所有枢纽路线保持开放。	不高的传播概率也可能触达网络的大部分。
随机	12%	部分路线消失，但主要枢纽往往仍在。	不同随机抽样下，传播缩小的程度不一。
度最高	12%	最繁忙的通道最先被移除。	在这个枢纽主导的模型中，传播范围急剧下降。

前沿·续

从病毒到行为，再越过成对关系

并非所有事物都像病毒一样传播，这也引出了该领域最鲜明的发现之一。病原体属于简单传染：一次充分暴露就可能完成传播，因此长程捷径能够把它播撒到网络的遥远区域。许多社会变化，例如采纳代价高昂的行为、参加风险很高的抗议，或改变根深蒂固的习惯，则更像复杂传染：一个人可能需要从多个来源获得强化，才会采取行动。

达蒙·森托拉与迈克尔·梅西 2007 年提出，对于复杂传染而言，能加快病毒传播的长程捷径反而可能妨碍扩散，因为一个遥远联系人不足以提供充分的社会佐证。森托拉随后在 2010 年发表于 *Science* 的实验中检验了这一预测：他在结构受控的人造在线网络中播种一种健康行为。该行为在聚集且冗余的网络中传播得更远、更快，与简单传染的预期恰好相反。同一套接线方式既可能加快谣言，也可能阻碍高风险的集体转变，关键取决于采纳需要多少强化。

前沿 02 ● 高阶群体传染有前景

也许连接并不是恰当的基本单位

传统网络以两个节点之间的成对连接为基本单位；社会影响却常发生在群体中，例如整桌人的一致意见所带来的压力、三人小团体，或一个委员会。一个不断发展的研究方向开始使用高阶网络，其中一项关系可以同时连接两个以上的节点；也使用单纯复形⁶，用填充的几何单元而非仅用成对关系编码群体相互作用。

2019 年，亚科波·亚科皮尼等人在 *Nature Communications* 证明，传染模型中的群体效应可以产生突变式转变与双稳态：低采纳状态和高采纳状态都能持续，微小变化便可能推动系统在两者之间跃迁。这项数学结果十分扎实，经验适用范围却仍待确定：多数证据来自理论或模拟，研究者仍在检验何时必须用高阶机制描述现实社会系统，何时由动力学更丰富的成对网络就足以解释。有前景，但尚未确立为普适解释。

前沿·续

心智的接线图

第一条前沿把网络当作传播的舞台，第二条则把网络本身当作研究对象：大脑的物理接线。2005 年，奥拉夫·斯波恩斯、朱利奥·托诺尼与罗尔夫·克特尔特提出了一个词和一项使命：绘制大脑中全部神经连接，并仿照「基因组」称之为连接组⁷。这一设想认为，枢纽、聚集与捷径等网络结构有助于解释计算。埃德·布尔莫尔与斯波恩斯 2009 年的综述，又推动「复杂脑网络」成为一个研究领域。

脑图呈现今天介绍的多种特征：既有紧密相连的局部系统，也有长程连接。它们呈现富人俱乐部：度较高的枢纽脑区彼此稠密相连，构成代价高昂的整合骨架。马丁·范登赫维尔与斯波恩斯 2011 年在人脑连接组中绘出了富人俱乐部组织。长程连接要消耗能量、空间和生物材料；这种架构在接线成本与高效整合之间权衡。不过，「小世界」或「无标度」等熟悉标签是否适用，取决于测量尺度、节点定义、阈值处理和零模型；下文还会回到这些限定。

2024 年的 FlyWire 与 2025 年的 MICrONS 发布跨越了明确的里程碑：前者给出成年果蝇大脑完整的突触级接线图，后者则为一立方毫米小鼠视觉皮层建立了极为稠密的结构—活动图谱。

前沿 03 ● 连接组绘制里程碑已确立

一整个果蝇脑，与一粒沙大小的小鼠皮层

2024 年 10 月，FlyWire 联盟在 *Nature* 发表一只成年雌果蝇大脑的完整接线图：139,255 个神经元、约 5,450 万个突触；多肯瓦尔德、施莱格尔等人的两篇配套论

⁶单纯复形以点、边、填充三角形、四面体及其更高维对应物表示群体关系。

⁷连接组是在特定尺度上绘制的神经连接图谱，既可以描述脑区之间的连接，也可以细至单个神经元之间的突触。

文还为 8,400 多种细胞类型提供了注释。

2025 年 4 月，MICrONS 联盟发布了约一粒沙大小的一立方毫米小鼠视觉皮层图谱：超过 200,000 个细胞、约 5.23 亿个突触，以及约 4 千米长的轴突接线。项目还把结构与功能记录联系起来；这些记录来自小鼠观看视觉刺激时约 75,000 个神经元的活动。它们是已经发布且数据公开的成果，却不是对脑功能的完整解释。研究范围至关重要：果蝇大脑不是哺乳动物大脑；一立方毫米也只是小鼠大脑的一小部分，而小鼠大脑本身又远小于人脑。完整到突触尺度的人脑连接组，距离当前已经完成的图谱仍极为遥远。

果蝇脑中的「六度」

FlyWire 网络连接得十分紧密。在包含 93.3% 已分析神经元的巨型强连通分量中，最短有向路径的平均长度为 4.42 跳；该分量内任一神经元都能在 13 跳之内到达其他任一神经元。米尔格拉姆的小册子通过约五位中间人横跨一片大陆，而穿越果蝇脑大部分区域的路径平均也同样浅短。两者共享的小世界模式只是一项结构比较，并不意味着社会熟人与突触会以相同方式运作，也不意味着解剖上的可达性就证明了功能性信号流。

前沿 04 ● 无标度与小世界脑网络标签仍有争议

神经科学的夸大解读止于何处

两句流行口号值得警惕。第一句是「大脑是无标度的」。脑网络的度分布可能很宽，也可能有丰富的枢纽；但许多数据更适合以带指数截断⁸的幂律拟合，而不是无界的纯幂律。生物学与代谢都会设置上限；没有任何脑区能获得无限多条连接。因此，简单宣称大脑「无标度」，就可能重拾那项对 928 个网络数据集的研究所揭示的夸大主张。

第二句甚至是「大脑是小世界网络」，同样会受研究者如何构造图的影响。在 2015 年在线发表、2016 年印刷出版的论文 *Is the brain really a small-world network?* 中，克劳斯·希尔盖塔格与亚历山德罗斯·古拉斯提出，有时「大世界」描述反而更合适。其中一位作者还明确重新审视了自己早先持有的相反立场。神经成像的图指标会随阈值处理、归一化、空间尺度和节点定义而变化；换一套处理方法，小世界系数就可能摇摆。连接组测量是真实的，整齐的形容词却取决于建模选择，至今仍有争议。

⁸指数截断会使重尾在超过某一尺度后下降得快得多，反映有限尺寸或枢纽大小受到的物理限制。

未决问题

哪些问题确实尚无定论

- 枢纽究竟如何形成？优先连接只是一种机制；适应度、优化、复制和物理约束也可能产生宽广的度分布。仅凭分布往往无法确定成因。
- 「无标度」真的是恰当问题吗？执着于某一种分布，可能让人忽视对行为更重要的社区、模体、层级与几何。
- 我们是否需要高阶模型？动力学足够丰富的成对网络，能否解释看似由群体传染造成的现象？经验检验仍处于早期。
- 是同质性⁹，还是影响？当一种行为看似沿社会网络传播时，究竟是一个人改变了另一个人，还是相似的人聚在一起并各自采纳？观察数据一向难以区分二者。森托拉的受控实验正是为了打破这种混杂，这直接呼应第 5 日：网络中的相关关系仍然不等于因果。
- 连接组能把我们带多远？接线图日益完整之后，结构图谱能否预测功能与行为？还是说，接线只搭好了舞台，动力学、化学与活动中仍含有关键的信息？这个问题将在人工智能与意识模块的第 123–126 日和第 138–145 日再度出现。

今日三句话

核心观点

网络可以保持局部聚集，又因少数远跳连接而在全局上变短；度的不均等则让枢纽对网络鲁棒性、传染与信息流产生格外强大的影响。

最佳类比

若每趟旅程都只能沿本地前进，环形村落世界便辽阔无边；加入少数虫洞般的捷径，同一群村落便化为一个小世界。

仍在争论

许多现实网络具有重尾，但它们是否真正无标度，取决于定义、统计比较与物理截断。

小世界与枢纽中的涌现·脑接线中的计算·沿连接流动的信息·通过累积优势实现的演化·富人俱乐部接线成本中的能量。

明日 → 第 13 日

测量与单位

今天从头到尾都在使用数字：5.2 位中间人、5,450 万个突触，以及常被宣称介于 2 与 3 之间的度指数。明天要追问它们之下的问题：测量究竟是什么？一米有多

⁹同质性是指相似的人倾向彼此建立关系；即使某项特征并未传播，这也会使它看起来仿佛发生了传播。

长？为什么自 2019 年起，它由一项固定的自然常数定义，而不再取决于巴黎的一根铂金棒？我们暂且放下推理工具，拿起量的工具；这是进入数学模块前的最后一项基础。

资料来源

资料来源与延伸阅读

1. Travers, J. & Milgram, S. (1969). "An Experimental Study of the Small World Problem." *Sociometry* 32(4): 425–443. 一招募 296 名起始者，217 人把链继续传出，64 条链完成；完成链平均经过 5.2 位中间人。doi.org/10.2307/2786545
2. Milgram, S. (1967). "The Small-World Problem." *Psychology Today* 1(1): 61–67. 一最初的通俗报道。
3. Kleinfeld, J. S. (2002). "Could It Be a Big World After All? The 'Six Degrees of Separation' Myth." *Society* 39: 61–66. 一讨论中途退出、选择偏差，以及持怀疑态度的理由。
4. Karinthy, F. (1929). "Láncszemek" ("Chains"), in *Minden másképpen van*. 一早期的「五位熟人」设想。Guare, J. (1990). *Six Degrees of Separation*. 一提供了如今熟知短语的戏剧。
5. Watts, D. J. & Strogatz, S. H. (1998). "Collective dynamics of 'small-world' networks." *Nature* 393: 440–442. doi.org/10.1038/30918
6. Leskovec, J. & Horvitz, E. (2008). "Planetary-Scale Views on a Large Instant-Messaging Network." *Proceedings of WWW '08*: 915–924. 一Microsoft Messenger: 约 1.8 亿用户；平均路径 6.6，中位数 7，最长路径 29。doi.org/10.1145/1367497.1367620
7. Backstrom, L., Boldi, P., Rosa, M., Ugander, J. & Vigna, S. (2012). "Four Degrees of Separation." *Proceedings of ACM Web Science '12*: 33–42. 一Facebook: 7.21 亿用户、690 亿条连接，平均距离 4.74。arXiv:1111.4570
8. Barabási, A.-L. & Albert, R. (1999). "Emergence of Scaling in Random Networks." *Science* 286(5439): 509–512. 一优先连接与 $P(k) \propto k^{-\gamma}$ 。doi.org/10.1126/science.286.5439.509
9. Clauset, A., Shalizi, C. R. & Newman, M. E. J. (2009). "Power-Law Distributions in Empirical Data." *SIAM Review* 51(4): 661–703. 一最大似然拟合与似然比模型比较。doi.org/10.1137/070710111
10. Broido, A. D. & Clauset, A. (2019). "Scale-free networks are rare." *Nature Communications* 10: 1017. 一928 个网络；4% 达到最强证据类别；对数正态候选往往拟合得同样好或更好。doi.org/10.1038/s41467-019-08746-5
11. Voitalov, I., van der Hoorn, P., van der Hofstad, R. & Krioukov, D. (2019). "Scale-free networks well done." *Physical Review Research* 1: 033034. 一基于正则变化的反驳与尾部定义。doi.org/10.1103/PhysRevResearch.1.033034
12. Holme, P. (2019). "Rare and everywhere: Perspectives on scale-free networks." *Nature Communications* 10: 1016. 一对定义之争的综合评述。doi.org/10.1038/s41467-019-09038-8
13. Pastor-Satorras, R. & Vespignani, A. (2001). "Epidemic Spreading in Scale-Free Networks." *Physical Review Letters* 86(14): 3200–3203. doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.3200 另见 Pastor-Satorras, R., Castellano, C., Van Mieghem, P. & Vespignani, A. (2015). "Epidemic processes in complex networks." *Reviews of Modern Physics* 87: 925.
14. Chinazzi, M. et al. (2020). "The effect of travel restrictions on the spread of the 2019 novel coronavirus (COVID-19) outbreak." *Science* 368(6489): 395–400. 一对 COVID-19 传播进行网络一元种群建模。doi.org/10.1126/science.aba9757

15. Centola, D. & Macy, M. (2007). "Complex Contagions and the Weakness of Long Ties." *American Journal of Sociology* 113(3): 702–734. Centola, D. (2010). "The Spread of Behavior in an Online Social Network Experiment." *Science* 329(5996): 1194–1197. doi.org/10.1126/science.1185231
16. Iacopini, I., Petri, G., Barrat, A. & Latora, V. (2019). "Simplicial models of social contagion." *Nature Communications* 10: 2485. 一群体传染、非连续转变与双稳态；理论结果已经成立，经验研究仍在发展。doi.org/10.1038/s41467-019-10431-6
17. Sporns, O., Tononi, G. & Kötter, R. (2005). "The Human Connectome: A Structural Description of the Human Brain." *PLoS Computational Biology* 1(4): e42. doi.org/10.1371/journal.pcbi.0010042
18. Bullmore, E. & Sporns, O. (2009). "Complex brain networks: graph theoretical analysis of structural and functional systems." *Nature Reviews Neuroscience* 10: 186–198. van den Heuvel, M. P. & Sporns, O. (2011). "Rich-Club Organization of the Human Connectome." *Journal of Neuroscience* 31(44): 15775–15786.
19. Dorkenwald, S. et al. (FlyWire Consortium) (2024). "Neuronal wiring diagram of an adult brain." *Nature* 634: 124–138. Schlegel, P. et al. (2024). "Whole-brain annotation and multi-connectome cell typing of *Drosophila*." *Nature* 634: 139–152. Lin, A. et al. (2024). "Network statistics of the whole-brain connectome of *Drosophila*." *Nature* 634: 153–165. —139,255 个神经元与约 5,450 万个突触；网络分析论文报告了上文使用的连通分量与路径长度统计。connectome DOI • network-statistics DOI
20. MICrONS Consortium et al. (2025). "Functional connectomics spanning multiple areas of mouse visual cortex." *Nature* 640(8058): 435–447. —一立方毫米；超过 200,000 个细胞；约 5.23 亿个突触；约 4 千米轴突；约 75,000 个神经元接受功能成像。doi.org/10.1038/s41586-025-08790-w
21. Hilgetag, C. C. & Goulas, A. (2016). "Is the brain really a small-world network?" *Brain Structure and Function* 221(4): 2361–2366. 一对「大世界」的挑战，以及图指标对建模选择的敏感性。doi.org/10.1007/s00429-015-1035-6
22. Serafino, M., Cimini, G., Maritan, A., Rinaldo, A., Suweis, S., Banavar, J. R. & Caldarelli, G. (2021). "True scale-free networks hidden by finite size effects." *PNAS* 118(2): e2013825118. 一有限尺寸缩放对直接分布拟合分类方法提出挑战。doi.org/10.1073/pnas.2013825118
23. Lynn, C. W., Holmes, C. M. & Palmer, S. E. (2024). "Emergent scale-free networks." *PNAS Nexus* 3(7): pgae236. 一无须网络净增长，仅凭重连便可产生无标度尾部的模型。doi.org/10.1093/pnasnexus/pgae236
24. Endo, A., Centre for the Mathematical Modelling of Infectious Diseases COVID-19 Working Group, Abbott, S., Kucharski, A. J. & Funk, S. (2020). "Estimating the overdispersion in COVID-19 transmission using outbreak sizes outside China." *Wellcome Open Research* 5: 67, version 3. —SARS-CoV-2 传播存在显著个体差异与超级传播的证据。doi.org/10.12688/wellcomeopenres.15842.3

可选附录·第 012 日·1/2

深层脉络

正文之外·可选阅读

正文搭出了网络科学的骨架：短路径、不均等的度、尚有争议的幂律、传染过程与连接组。页边仍留下七个问题：为什么你的朋友看起来比你更受欢迎？一个人看不见整张图，怎样找到短路径？哪些社会桥梁传递新信息？为什么枢纽节点能抵御一种损伤，却会放大另一种？当网络彼此依赖时会发生什么？谁算得上居于中心？检测到的社区究竟何时属于现实世界，而非算法的产物？

接续主路径

本附录扩展第 12 日正文，而非取代它。阅读时不妨随时调用第 5 日的因果区分、第 6 日的方差、第 8 日的涌现、第 9 日的级联与第 11 日的抽样偏差。

深掘 I 沿边抽样

为什么你的朋友看起来比你更受欢迎

Scott Feld 于 1991 年提出的友谊悖论描述的是平均量，并非针对个人的冒犯：一个人的朋友平均拥有的朋友数，不少于全体人的平均朋友数。度为 100 的节点会出现在 100 条友谊边的端点；度为 2 的节点只会出现两次。因此，沿边抽样会使度较高的节点在样本中占比过高。

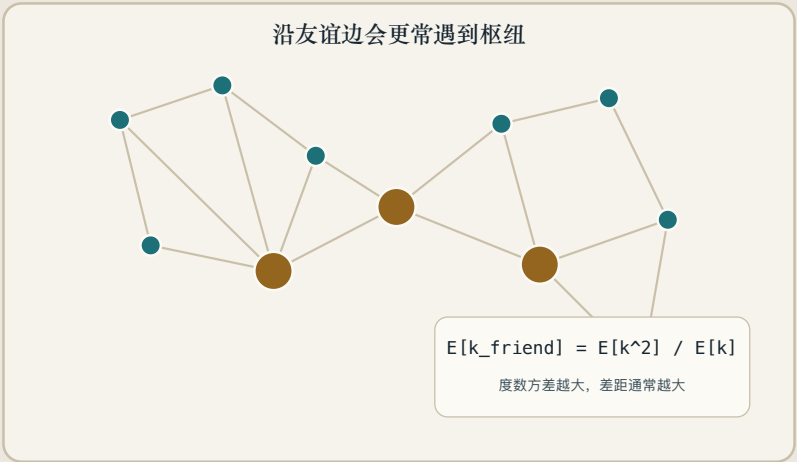
令 k 表示度。均匀抽取节点时，期望度为 $\langle k \rangle$ 。均匀抽取一条边并沿边到达节点时，期望度为

$$\frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} = \langle k \rangle + \frac{\text{Var}(k)}{\langle k \rangle}。$$

只要平均度为正，两者之差就不会为负；度的方差越大，差距越大。这才是定理所说的内容。它并不意味着每个人自己的朋友都比自己更受欢迎，也不意味着每张图中的大多数人必然都亲历这一悖论。局部比较取决于个人在网络中的位置，枢纽节点显然就是例外。

图·抽取普通人与抽取朋友

沿均匀抽取的友谊边取样，会按节点的度为每个人加权。示例网络把两种抽样框架并列呈现，但并不暗示每位被选中的人都有更受欢迎的朋友。



连接多的人出现在更多朋友名单中，因此朋友的期望度数为 $E[k^2]/E[k]$ ，通常高于普通人的 $E[k]$ 。

抽样框架	期望度	谁会获得额外权重
均匀抽取一个人	平均度： $E[k]$	每个节点都只有一次入选机会。
沿一条友谊边取样	二阶矩除以均值： $E[k^2]/E[k]$	度为 k 的节点有 k 次被到达的机会。
两者之差	度的方差除以均值	度越不均等，平均差距越大。

这种偏差也能派上用场，因为通过朋友提名接触到的人往往更居于网络中心。2009 年 H1N1 暴发期间，Nicholas Christakis 与 James Fowler 跟踪了两组哈佛本科生：一组随机抽取，另一组由前一组提名为朋友。以临床确诊流感为准，拟合出的朋友组流行曲线比随机组提前 13.9 天；以自报症状为准，提前量较小，仅为 3.2 天。这些估计来自一个边界明确的校园网络，可获得多少预警时间取决于病原体、网络、抽样方式与诊断规则。该研究展示的是一种传感器策略，并不能保证每次疫情都能提前两周预警。

不画出整张图，也能找到枢纽

同一种沿边抽样偏差还启发了熟人免疫^a。在 Cohen、Havlin 与 ben-Avraham 的网络模型中，随机选人并为其报出的一名联系人实施免疫，比均匀随机免疫更高效地触及枢纽节点。这个结果回答了正文中的枢纽定向干预展项引出的一项实际质疑：并非总要先掌握完整的网络地图。现实项目仍须面对提名不全、联系人变化、对接触对象或服务的可及性限制，以及度只是决定传播的众多因素之一等问题。

^a熟人免疫先随机抽取一些人，请每人报出一名联系人，再为被报出的联系人实施免疫；这样，度较高的节点被抽中的概率更高。

深掘 II 去中心化搜索

Milgram 实验隐藏的另一个难题

正文强调，短的熟人链确实存在。这个结果里还藏着第二个问题：参与者只知道自己的联系人，看不见全局图，他们怎样找到一条短链，并让其中一些链逐步接近遥远的目标？

Jon Kleinberg 在一个理想化格点模型中区分了短路径性¹⁰与可导航性¹¹。每个节点既有局部格点邻居，也有长程联系人。在 d 维格点中，连接到距离 r 处节点的长程联系人概率满足

$$\Pr(u \rightarrow v) \propto r(u, v)^{-d}。$$

当指数与格点维数相等时，在 Kleinberg 的二维设定中，贪心路由能以期望 $O((\log n)^2)$ 步送达消息，其中 n 是格点的边长。对该模型中的其他指数，在最坏的渐近意义下，去中心化送达需要多项式数量的步骤。这个结论精确，却有明确边界：它是关于特定几何、信息规则和随机连边分布的定理，并不能证明每个人类社会都恰好处在某个指数上。

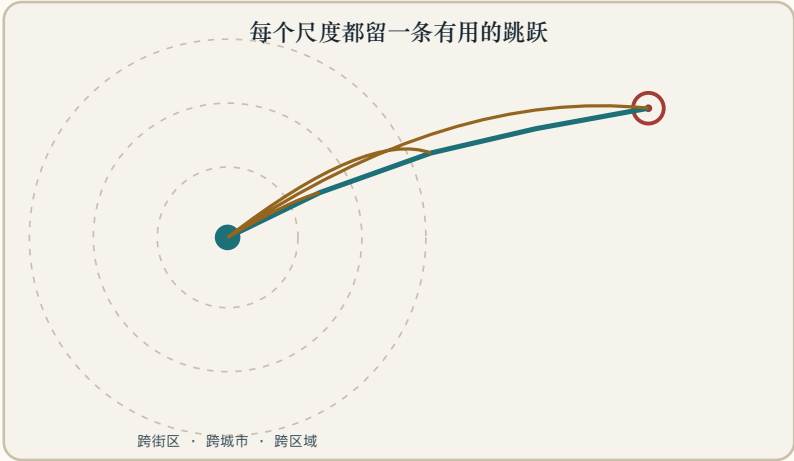
略去形式细节后，直觉依然成立。如果长程关系覆盖多个距离尺度，那么无论还剩多远，信使都有机会遇到一条能大幅缩短余下距离的关系。均匀随机的捷径或许能让图上的路径变短，却未必能告诉只掌握局部信息的搜索者哪条捷径真正有用。

¹⁰只要图中存在短路径，网络就是「小」的；至于任何人能否凭局部信息找到这些路径，则是另一回事。

¹¹可导航网络允许去中心化规则仅凭局部连接和关于目标的有限信息找到短路线。

图·跨越多个尺度的连接

高亮节点既有局部联系，也有跨越多个距离尺度的长程关系。贪心路线可以反复缩短到目标的距离；本图旨在说明 Kleinberg 的机制，并非估计社会网络的指数。



可导航的小世界还要求局部行动者能找到短路径；跨尺度的长程联系让贪心搜索不断缩短剩余距离。

从社会搜索到向量搜索

分层可导航小世界（Hierarchical Navigable Small World, HNSW）是一种基于图的近似最近邻搜索方法。其层级结构可在上层执行长距离跳转，再在靠近查询目标时作更精细的移动，与可导航网络的多尺度逻辑相呼应。它并不是对 Kleinberg 逆距离格点定律的字面实现。Dodds、Muhamad 与 Watts 的社会搜索实验同样必须附带样本流失这一限定：超过 60,000 名电子邮件用户尝试把消息传给分布在 13 个国家的 18 个目标，但成功率高度依赖参与者是否继续转发。对流失建模后，作者估计路线中位数为五至七步，并据此认为：激励会影响一个理论上可搜索的网络在实践中是否真能被搜索。

深掘 III 社会桥梁

弱关系的力量

长程的社会捷径也有自己的质地。它们往往是弱关系¹²：熟人、前同事，或只是偶尔遇见的人。Mark Granovetter 1973 年的论证着眼于结构。强关系往往位于一个稠密集群内部，其中的信息多有冗余；弱关系却能桥接另一个集群，带来亲近联系人没有的信息。

最初关于求职的证据来自观察研究，因此无法排除一种混杂解释：更想换工作的人，也可能更主动建立弱关系。Rajkumar 等人借助 LinkedIn 对「你可能认识的人」推荐长达五年的随机化调整，获得了更强的因果识别依据。在超过 2,000 万名平台用户中，这些实验产生了约 20 亿条新连接；分析随后把这些连接与 LinkedIn 记录的约 60 万次获得新工作联系起来。

前沿 01 ● 平台因果检验 ● 最优点因情境而异

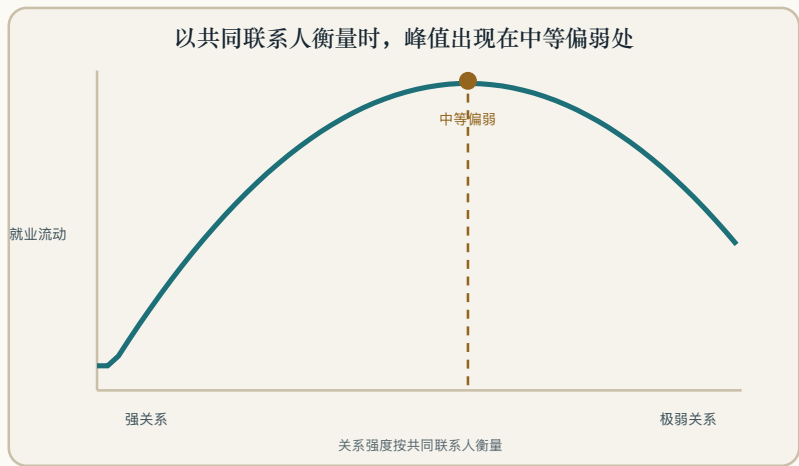
更精确的 Granovetter 桥梁

实验支持了因果核心：建立较弱的关系能够增加职业流动。它也把「最弱的关系最好」改写成了有条件的结论。这种关系是非线性的：以共同联系人衡量时，中等偏弱的关系表现最佳；以互动强度衡量时，最弱的关系表现最佳。效果还因行业而异：弱关系在数字化行业更有帮助，而在数字化程度较低的行业，较强关系反而可能更有帮助。该结果只涉及研究期间内由推荐促成的关系，且职业变动必须能在这个职业平台上观察到；不能把它提升为适用于所有劳动力市场或人际关系的固定最优值。

¹² 弱关系是强度较低的社会关系，例如熟人或前同事；关系强度可以用多种不同方式操作化。

图·弱关系并非越弱越好

这条示意性的倒 U 形曲线呈现了 LinkedIn 研究中的一种操作化方式：关系变弱时，职业流动先上升，到了极弱处则趋平或下降。互动强度、共同联系人和行业分别呈现出不同模式。



LinkedIn 随机实验中的共同联系人指标呈倒 U 形；互动强度指标却呈现不同模式。关系强度的操作化方式不可省略。

深掘 IV 失效的几何

鲁棒，却又脆弱

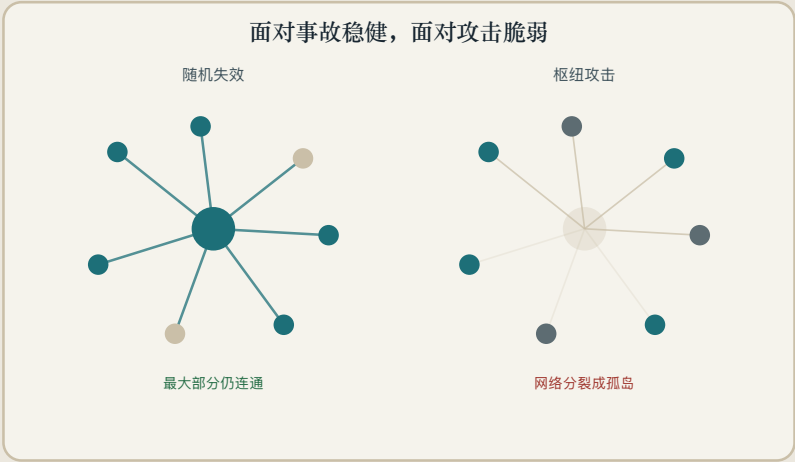
枢纽节点会改变失效的几何。Albert、Jeong 与 Barabási 比较了理想化和经验网络表征中的随机移除与刻意移除度较高的节点。在枢纽丰富的图中，均匀随机失效更可能击中数量众多的低度节点；若先移除枢纽，则会一次删去许多边。因此，同一种度的异质性，既能让网络在一种移除规则下保留大型连通分量，也会在另一种规则下加速碎裂。

「鲁棒而脆弱」¹³概括的是这种反差，并非一个普适阈值。展项中的任何移除比例都不能自动套用于真实系统。阈值取决于度相关性、聚集性、方向、容量、修复、网络规模、功能的判定方式，以及观测到的图是否真能由该模型恰当描述。

¹³ 「鲁棒而脆弱」指系统能够承受广泛的一类扰动，却会在与其结构相契合的扰动下迅速失效。

图·随机失效与枢纽优先移除

示例玩具网络比较了两种节点移除顺序。表中百分比只描述这个网络；真正可迁移的结论，是经常抽中低度节点的随机规则与刻意移除度较高节点的规则会产生不同结果。



在这张重尾教学网络中，随机移除多半击中小编号；枢纽优先移除则迅速切断最大连通部分。临界比例并非普适常数。

移除规则	早期击中的节点	典型结构效应	玩具模型无法证明什么
均匀随机失效	多为低度节点，因为这类节点数量众多	在枢纽丰富的模型中，最大连通部分往往逐渐缩小。	互联网、细胞或其他真实系统的韧性阈值。
枢纽优先移除	按定义先移除度较高的节点	许多关联边同时消失，碎裂因而可能加速。	度就是正确的操作目标，或度是功能的唯一来源。
考虑功能的失效	按负荷、依赖关系、地理位置或角色选择节点	结果可能不同于上述两种拓扑排序。	仅凭连通性就能衡量服务连续性。

一项生物学结果说明了为何必须区分拓扑与功能。Jeong 等人报告，在一张早期酵母蛋白质相互作用图中，连接较多的蛋白质更可能是必需蛋白。这证明的是该数据集中心性与致死性之间存在关联，不能据此把度在所有情境下都等同于生物学重要性。测量偏差、相互作用类型、冗余和细胞环境都很重要。同理，互联网图经过工程设计，具有容量、路由和修复机制；连通性下降并不等于服务失效。

深掘 V 耦合失效

当网络彼此倚靠

现实基础设施分成多层。电力支撑通信设备，通信支撑监测与修复，而两者还可能依赖交通、燃料、定位和云服务。一次失效可能跨越网络层，再沿另一条依赖关系返回，形成第 9 日所说的增强回路。

Buldyrev 等人于 2010 年将其中一种情形形式化。他们的模型以硬依赖关系配对两个网络中的节点，只有同时属于彼此连通的巨型连通分量的节点才算仍具功能。在这些假设下，一层中的失效会使配对节点失效，令另一层碎裂，再把影响反馈回来。模型可以出现突变式渗流相变；在他们研究的配置中，更宽的度分布反而会增加网络面对随机失效时的脆弱性，与上文单一网络的模式相反。

2003 年意大利停电常被用来说明这项研究的动机，却不能视为该模型在现实中的直接复现。级联起于树木引发闪络、使瑞士的一条输电线路跳闸，随后电网事件继续扩散停电。通信故障阻碍了修复；后来的基础设施研究把这种恢复阶段的耦合，与「电信故障扩大了最初停电的地理级联」这一主张区分开来。当通信能够提供有效控制时，细致模型甚至会发现耦合带来的好处。相依关系会增加失效路径，但其作用取决于耦合具体做了什么。

前沿 02

● 模型中的突变式崩解

● 普遍脆弱性

耦合本身也决定韧性

这一理论改变了分析单位。分别测试电力层与通信层，可能会漏掉由二者依赖关系产生的反馈路径。不过，稳妥的结论必须带上条件：有些耦合架构会放大失效，有些会拖慢修复，也有些通过提供控制而降低风险。韧性属于组件、网络层之间的连接，以及支配这些连接的运行规则。这正是第 8 日所说的「多则异」在工程中的形态。

深掘 VI 中心性

PageRank 背后的特征向量

「枢纽」通常指度较高的节点，但中心性并不是单一属性。度中心性奖励直接连接多的节点。介数中心性¹⁴奖励中介作用：一座低度桥梁也可能位于两个社区之间的许多最短路径上。特征向量中心性¹⁵奖励与本身得分也很高的节点相连。

对于邻接矩阵 A ，最后一种思想可写为

$$x_i = \frac{1}{\lambda} \sum_j A_{ij} x_j。$$

「重要节点连接着重要节点」看似循环，却可以转化为一个特征向量问题。不同定义回答不同过程中的问题，所以若不说明用途，排序就是不完整的。

Larry Page 与 Sergey Brin 把递归式连接重要性用于网页搜索。PageRank 模拟随机

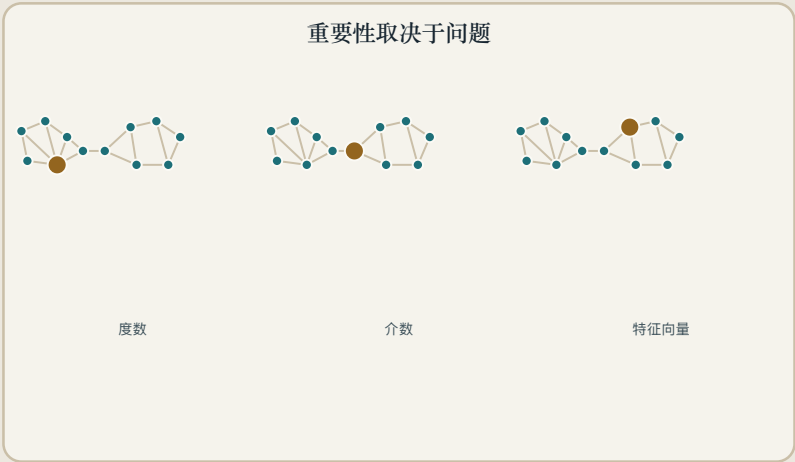
¹⁴ 介数中心性衡量其他节点之间的最短路径有多大比例经过某个节点。

¹⁵ 特征向量中心性会让与高分邻居相连的节点获得更高权重。

浏览者沿有向链接移动，并加入阻尼或随机跳转项，以避免陷入汇点并使平稳排序具有良好性质。它与特征向量中心性有关，但不等同于把未经修正的特征向量中心性直接用于无向图。链接分析是 Google 早期搜索引擎的组成部分之一；搜索质量、基础设施、数据以及后来众多排序系统，不能被压缩成一个向量。

图·「重要」的三种答案

在同一张双社区图上，如果重要性分别指直接触达、最短路径上的中介作用，或连接到已居于中心的邻居，夺得首位的会是不同节点。



度中心性衡量直接连接，介数中心性寻找最短路径桥梁，特征向量中心性奖励与重要节点相连；不存在脱离过程的唯一重要节点。

度量	奖励什么	适合回答的问题	主要局限
度中心性	直接连接多	谁能立即联系许多邻居？	忽略这些邻居在网络中的位置。
介数中心性	位于最短路径上	在最短路径路由下，谁在群体之间充当流量中介？	会随路径模型变化，且计算成本可能很高。
特征向量中心性	连接高分邻居	谁嵌入在已经显著的节点之间？	可能集中在一个稠密区域，且需要满足谱条件。
PageRank	有向随机浏览者模型中的平稳访问量	哪些网页获得递归加权的链接？	取决于阻尼、方向和所选转移模型。

交互展项刻意只用一张图，再从三个视角观察它。疾病控制问题、通信瓶颈问题与搜索排序问题未必会选中同一个节点。不说明过程便声称某节点「最居中」，就像不说明单位便声称某种测量「最好」一样不完整。

深掘 VII 社区结构

找到群体，也检查接缝

许多图的某些节点集合内部，比集合之间更为稠密：朋友圈、研究专业、蛋白质复合物或政治阵营。社区发现¹⁶方法试图推断这类集合。

Girvan 与 Newman 提议移除边介数高的边：稠密群体之间的桥梁承载大量最短路径，因此反复移除这些边可以显露接缝。Newman 与 Girvan 随后将模块度¹⁷形式化，用来相对于保留度的零模型为划分评分。Louvain 是优化模块度的一种快速启发式。Infomap 采取不同路径：它寻找能够压缩随机游走轨迹的划分。这些方法可能得出不同答案，因为它们对「群体」作了不同的操作化定义。

前沿 03 ● 有用的划分 ● 唯一真实划分

检测器也会制造确定感

模块度存在分辨率极限¹⁸：真正存在的小群体可能被合并，因为全局得分无法分辨它们。其优化景观还具有简并性；结构不同的划分可能得到几乎相同的分数。Louvain 甚至可能返回连接很差或彼此不连通的社区。Leiden 修复了这一连通性缺陷，并改进了局部优化保证。然而，当 Leiden 用于优化模块度时，它并不会消除模块度的分辨率极限，也不会把多尺度图变成只有一种正确划分的图。提出社区主张时，应报告目标函数、分辨率、不同运行与不同方法之间的稳定性，以及是否有外部证据支持该分组。

未决问题

边缘地带仍无定论

- 观测到的社会网络究竟有多强的可导航性？Kleinberg 在一个模型中找到了明确条件；估计真实且不断变化的社会所对应的几何与搜索规则，则是另一项任务。
- 能否在耦合系统失效前预测级联风险？脆弱性模型可以识别机制和阈值，却未必能说出哪一次起始事件会越过阈值，或它何时发生。
- 是否存在正确的社区尺度？群体可能嵌套且相互重叠，因此多个分辨率或许能同时提供信息。
- 哪一种中心性能够预测哪一种过程？度中心性、介数中心性、特征向量度量、流量度量与控制度量对结构的排序各不相同。让指标与扩散、路由、干预或影响过程相匹配，本身就是科学问题的一部分。

¹⁶ 社区发现会在事先没有标签的情况下，寻找组内连接模式相对于明确的零模型或流模型有所不同的节点群体。

¹⁷ 模块度把观测到的组内边数，与保留节点度的指定随机零模型所给出的期望作比较。

¹⁸ 当界定清晰的小型社区嵌在足够大的图中时，分辨率极限会使模块度优化把它们合并起来。

- 如果边具有时间性，且相互作用以群体为单位，还会保留什么？静态成对图忽略了顺序、持续时间、同步群体相互作用、自适应重连，以及行为与拓扑之间的反馈。

核心观点

对网络进行抽样、搜索、破坏和排序，是四种不同操作。每一种都会揭示同一连接结构的不同后果，也各自需要不同假设。

最佳类比

Kleinberg 的信使每次只按一个尺度读取地址：只有网络能在尚待跨越的距离上提供有用跳跃，局部知识才可能拼成一条短的全局路线。

仍在争论

观测到的群体与排序，一部分取决于观察所用的透镜。只有明确过程、零模型、分辨率与稳定性后，一项中心性或社区划分才能成为科学主张。

本篇线索 › 涌现（局部连接产生全局可达性、碎裂与群体）• 信息（弱关系携带非冗余信号；PageRank 与 Infomap 把路径转化为排序或编码）• 计算（去中心化搜索与社区优化）• 演化（可导航结构与鲁棒结构可能如何起源）• 能量（基础设施层既交换电力，也交换控制信息）。

下一篇附录 › 活跃前沿

结构层面的深掘到此为止，第 12 日还留有一翼面向前沿。请继续阅读「活跃前沿」，探索高阶相互作用、变化中的网络与耦合临界转变过程。

来源与延伸阅读

1. Feld, S. L. (1991). "Why Your Friends Have More Friends Than You Do." *American Journal of Sociology*, 96(6), 1464–1477. 友谊悖论与沿边加权抽样。doi:10.1086/229693
2. Christakis, N. A. & Fowler, J. H. (2010). "Social Network Sensors for Early Detection of Contagious Outbreaks." *PLoS ONE*, 5(9), e12948. 哈佛 H1N1 研究中，临床确诊提前 13.9 天，自报症状提前 3.2 天。doi:10.1371/journal.pone.0012948
3. Cohen, R., Havlin, S. & ben-Avraham, D. (2003). "Efficient Immunization Strategies for Computer Networks and Populations." *Physical Review Letters*, 91, 247901. 网络模型中的熟人免疫。doi:10.1103/PhysRevLett.91.247901
4. Kleinberg, J. M. (2000). "The Small-World Phenomenon: An Algorithmic Perspective." *Proceedings of STOC 2000*, 163–170; and "Navigation in a Small World." *Nature*, 406, 845. 去中心化路由与匹配维数的长程指数。doi:10.1145/335305.335325 · doi:10.1038/35022643
5. Dodds, P. S., Muhamad, R. & Watts, D. J. (2003). "An Experimental Study of Search in Global Social Networks." *Science*, 301(5634), 827–829. 超过 60,000 名电子邮件用户；计入样本流失后，估计路线中位数为五至七步。doi:10.1126/science.1081058

6. Malkov, Y. A. & Yashunin, D. A. (2020). "Efficient and Robust Approximate Nearest Neighbor Search Using Hierarchical Navigable Small World Graphs." *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 42(4), 824–836. HNSW; 2018 年在线发表。doi:10.1109/TPAMI.2018.2889473
7. Granovetter, M. S. (1973). "The Strength of Weak Ties." *American Journal of Sociology*, 78(6), 1360–1380. 作为社会集群之间桥梁的弱关系。doi:10.1086/225469
8. Rajkumar, K., Saint-Jacques, G., Bojinov, I., Brynjolfsson, E. & Aral, S. (2022). "A Causal Test of the Strength of Weak Ties." *Science*, 377(6612), 1304–1310. LinkedIn 随机化推荐实验; 效应呈非线性且因行业而异。doi:10.1126/science.abl4476
9. Albert, R., Jeong, H. & Barabási, A.-L. (2000). "Error and Attack Tolerance of Complex Networks." *Nature*, 406, 378–382. 随机失效与定向移除; 2001 年在 *Nature* 409, 542 刊登更正。doi:10.1038/35019019
10. Jeong, H., Mason, S. P., Barabási, A.-L. & Oltvai, Z. N. (2001). "Lethality and Centrality in Protein Networks." *Nature*, 411, 41–42. 早期酵母蛋白质相互作用网络中的度与必需性。doi:10.1038/35075138
11. Buldyrev, S. V., Parshani, R., Paul, G., Stanley, H. E. & Havlin, S. (2010). "Catastrophic Cascade of Failures in Interdependent Networks." *Nature*, 464, 1025–1028. 硬依赖渗流模型与突变式相互碎裂。doi:10.1038/nature08932
12. Korkali, M., Veneman, J. G., Tivnan, B. F., Bagrow, J. P. & Hines, P. D. H. (2017). "Reducing Cascading Failure Risk by Increasing Infrastructure Network Interdependence." *Scientific Reports*, 7, 44499. 细致基础设施模型可能逆转简单依赖渗流模型的结论; 并区分意大利停电的传播效应与恢复效应。doi:10.1038/srep44499
13. Brin, S. & Page, L. (1998). "The Anatomy of a Large-Scale Hypertextual Web Search Engine." *Computer Networks and ISDN Systems*, 30(1–7), 107–117; Page, L., Brin, S., Motwani, R. & Winograd, T. (1999). "The PageRank Citation Ranking: Bringing Order to the Web." Stanford technical report. 具有随机浏览者解释的有向递归链接排序。doi:10.1016/S0169-7552(98)00110-X
14. Bonacich, P. (1972). "Factoring and Weighting Approaches to Status Scores and Clique Identification." *Journal of Mathematical Sociology*, 2(1), 113–120. 基于特征向量的地位得分。doi:10.1080/0022250X.1972.9989806
15. Freeman, L. C. (1977). "A Set of Measures of Centrality Based on Betweenness." *Sociometry*, 40(1), 35–41; Brandes, U. (2001). "A Faster Algorithm for Betweenness Centrality." *Journal of Mathematical Sociology*, 25(2), 163–177. 介数的定义与高效计算。Freeman DOI • Brandes DOI
16. Girvan, M. & Newman, M. E. J. (2002). "Community Structure in Social and Biological Networks." *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 99(12), 7821–7826; Newman, M. E. J. & Girvan, M. (2004). "Finding and Evaluating Community Structure in Networks." *Physical Review E*, 69, 026113. 基于边介数的检测与模块度。doi:10.1073/pnas.122653799 • doi:10.1103/PhysRevE.69.026113
17. Blondel, V. D., Guillaume, J.-L., Lambiotte, R. & Lefebvre, E. (2008). "Fast Unfolding of Communities in Large Networks." *Journal of Statistical Mechanics*, P10008; Rosvall, M. & Bergstrom, C. T. (2008). "Maps of Random Walks on Complex Networks Reveal Community Structure." *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 105(4), 1118–1123. Louvain 模块度优化与 Infomap 的流压缩替代方案。Louvain DOI • Infomap DOI
18. Fortunato, S. & Barthélemy, M. (2007). "Resolution Limit in Community Detection." *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 104(1), 36–41. 模块度可能合并小型社区。doi:10.1073/pnas.0605965104
19. Good, B. H., de Montjoye, Y.-A. & Clauset, A. (2010). "Performance of Modularity Maximization in Practical Contexts." *Physical Review E*, 81, 046106. 简并的高模块度划分。doi:10.1103/PhysRevE.81.046106
20. Traag, V. A., Waltman, L. & van Eck, N. J. (2019). "From Louvain to Leiden: Guaranteeing Well-Connected Communities." *Scientific Reports*, 9, 5233. Louvain 的连通性缺陷与 Leiden 的修复方案。doi:10.1038/s41598-019-41695-z

可选附录·第 012 日·2/2

活跃前沿

正文之外·可选阅读

成对关系图是科学中最有成效的简化之一：把事物化为节点，把相关的节点两两相连，再研究由此形成的结构。本附录考察六项对这种简化本身提出挑战的研究纲领。它们追问：群体何时无法还原为节点对；连接关系能否用某种潜在几何表示；局部算法如何在图上计算和学习；网络控制究竟能保证什么；气候阈值可能如何相互作用；以及表面可见的模式何时根本无法从数据中恢复。

本文位置

这里是在推进前文，而非重述旧课。第 8 日已经介绍相变、重整化与高阶网络动力学；这里的问题是，与更简单的模型比较后，额外的相互作用阶数是否仍有解释力。第 9 日已经提供临界点、迟滞与杠杆作用；这里则把多个阈值放入一个带符号的耦合网络。第 10 日给出贯穿全文的提醒：推断出的结构可以很有用，却未必是藏在观测背后的某个字面实体。

每项主张都按其实际适用范围标注。绿色表示结果在明确假设下已经确立；琥珀色表示证据可信，但仍处早期阶段或受模型约束；红色表示现有证据尚不支持该结论。

前沿 I 超越成对关系

当二元关系不够用

普通的边只记录两个节点之间的关系。这有时已经足够，但把事件投影为节点对，也可能抹去事件发生的方式。Alice、Ben 与 Chen 三人合写一篇论文，得到的三角形，与三篇分别由两人合写的论文完全相同。投影后的图保留了谁与谁合作，却丢失了这究竟是一次三人共同行动，还是三次两人行动。

超图¹⁹把群体保留为一条超边。单纯复形²⁰还施加了更严格的规则：若存在一个实心三角形，其三条边和三个节点也都必须存在。这条闭包规则允许变量定义在边、三角形和更高维胞腔上，并可用霍奇拉普拉斯算子²¹等算子描述这些信号如何相互作用。

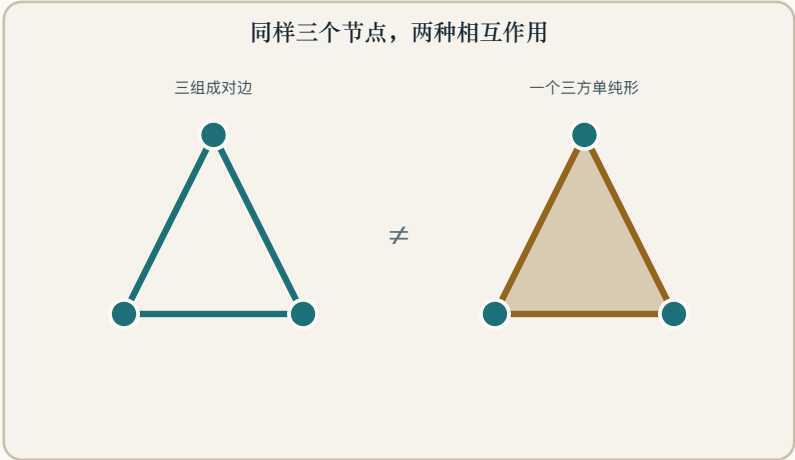
¹⁹超图推广了普通图，允许一条超边同时连接任意数量的节点。

²⁰单纯复形由节点、边、实心三角形及更高维单纯形组成，并且每个单纯形的所有面都必须包含在内。

²¹霍奇拉普拉斯算子把图拉普拉斯的思想从节点信号推广到边、三角形及更高维胞腔上的信号。

图解·边集合与单纯形

空心三角形记录三组二元关系；实心三角形还记录一个不可约的三方关系及其各个面。两者的节点与边界可以完全相同，编码的事件却不一样。

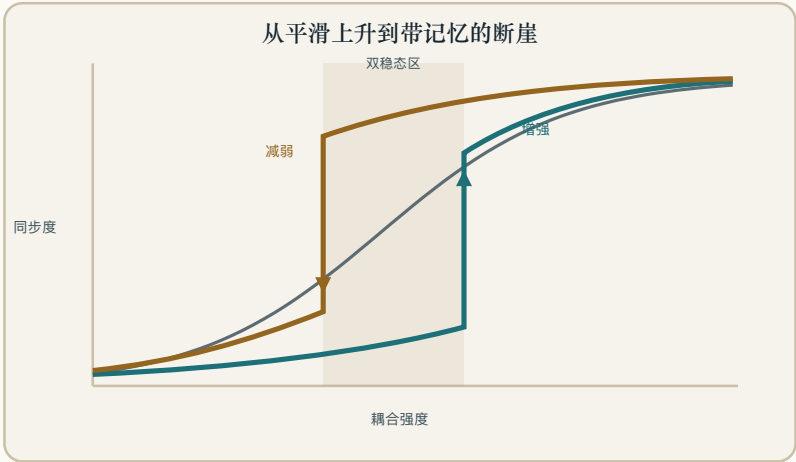


空心三角形只记录三组成对联系；填充三角形把三方共同作用作为一个不可约单元。

其动力学后果可能是性质上的改变。在某些 Kuramoto 型振子模型中，加入三体及更高阶耦合，会使同步的连续出现变成具有双稳态和迟滞的突然跃迁。这并不表示每一种实测群体相互作用都会产生爆炸式转变；它只说明，相互作用的阶数能够改变模型的相图。第 8 日介绍了相变，第 9 日介绍了有记忆的悬崖；这里的进展在于，这道悬崖可以来自相互作用的表示方式，而不只是相互作用强度的增加。

图·连续同步与爆炸式同步

这些曲线概括了高阶振子模型中出现的行为。它们是教学示意图，不是观测结果、拟合数据，也不是针对某个大脑、电网或动物群体的模拟输出。



高阶耦合可以把连续同步转变改造成不连续跃迁，并让增强与减弱耦合走过不同路径。曲线为机制示意。

机制	耦合增强时	耦合减弱时	示意图能够说明什么
成对耦合基线	在图示的比较中，同步程度平滑上升。	沿同一路径返回。	该模型族中一条连续、可逆的参照曲线。
高阶机制	系统可以一直不同步，随后突然跃迁至同步。	同步状态可以维持到低于正向切换点的位置。	在特定振子模型中，高阶项可以造成不连续转变与迟滞。
双稳态区间	在同一耦合值下，系统可能处于低同步或高同步状态。	观测到的状态取决于系统历史。	路径依赖是模型结果；曲线并未估计任何经验阈值。

前沿 01 ● 高阶效应 ● 成对模型过时

群体关系究竟改变了多少？

2020 年以来发表的综述记录了成对投影可能遗漏的动力学，包括同步、传染与稳定性的变化。不过，其适用范围仍因具体案例而异。Bian、Zhou 与 Bi 在 2025 年进行比较后发现：在十二个网络中，保留高阶信息对某些网络的超边预测帮助很大，对另一些则帮助很小。因此，正确的问题不是群体事件是否存在——许多事件显然存在——而是高阶表示能否充分改善特定的解释、预测或干预，从而抵偿其增加的参数与计算成本。

前沿 II 网络的形状

经拟合而非直接观察的潜在几何

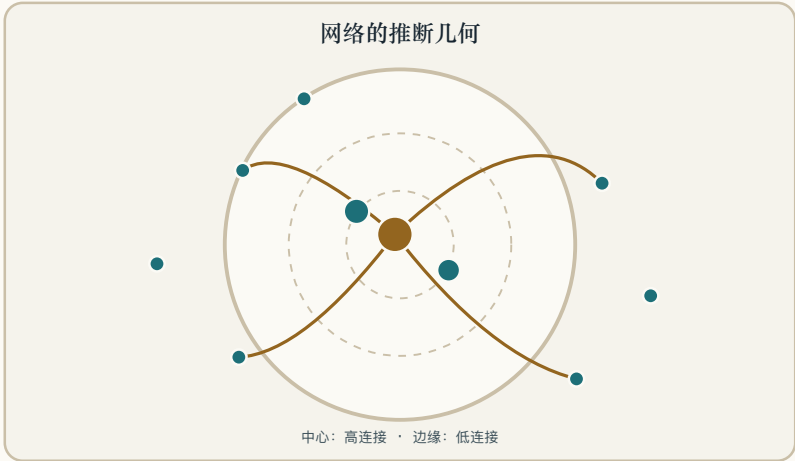
许多网络模型从邻接关系出发，也止于邻接关系：两个节点要么相连，要么不相连。另一套研究纲领则为每个节点指定某个潜在空间²²中的位置，并让连接概率随距离增加而降低。在一种常见的双曲模型中，径向位置反映受欢迎程度或期望度，角向距离反映相似性。枢纽节点更靠近中心，专门化节点则更接近边缘。

双曲空间之所以有用，是因为其中可用的体积随半径呈指数增长。于是，分支层级既有扩展空间，又能保持较短路径。在坐标与连接采用适当分布时，该模型能够同时生成度的异质性、聚集性、社区和可导航的短路径。这些性质都是模型的结果；观察到它们，并不能唯一证明生成这些性质的系统实际位于双曲空间。

²²潜在空间是一套经推断得到的坐标系统，其距离被选定用来解释观测到的关系或数据。

图解·推断出的双曲地图

庞加莱圆盘视图把连接广泛的节点置于中心附近，把专门化节点置于圆周附近。这些坐标是在模型下根据连接关系估计出来的，不是实测的物理位置。



双曲嵌入用隐藏距离解释连接概率；它是有用模型，不是直接观察到的物理空间。

这种几何还提出了一种网络粗粒化方法：合并潜在空间中彼此接近的节点，再检验哪些性质能够保留下来。几何重整化在以五种分辨率重建的人脑结构连接组中揭示了近似自相似性。2023 年的另一项研究纲领——拉普拉斯重整化——不预先采用双曲嵌入，而是用扩散模态定义尺度。第 8 日把重整化介绍为反复进行的粗粒化；此处的前沿问题则是比较性的：哪一种粗粒化有充分依据，不同方案保留的结构是否相同？

前沿 02 潜在几何 网络尺度

强大的坐标系仍然只是模型

双曲嵌入可用于路由、连接预测、可视化与多尺度分析，这项研究纲领也已经用同一个框架重现了多种反复出现的网络特征。然而，坐标是根据观测到的图推断而来，可能取决于嵌入模型和分辨率，而且未必唯一。「双曲潜在空间模型能够很好地描述这个图」在许多案例中是有依据的判断；「这个系统确实生活在一个隐秘的双曲平面上」则是拟合结果无法支持的形而上升级。

前沿 III 在纠结的网络上计算

局部消息、环路与图学习

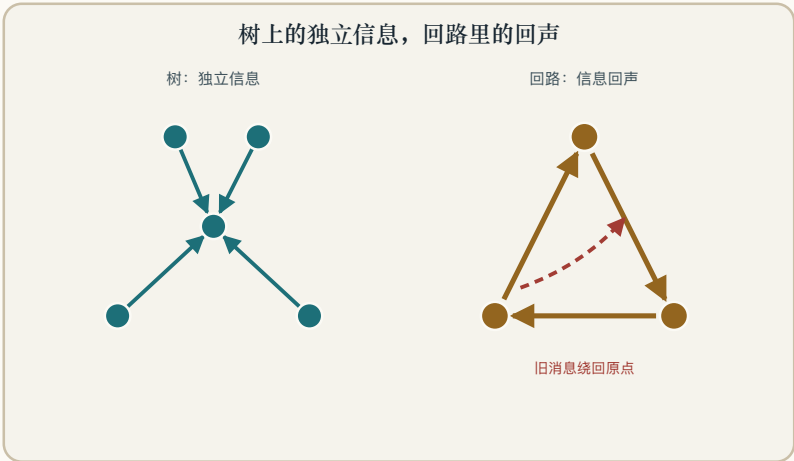
信念传播²³把全局计算转化为反复进行的局部更新。每个节点接收邻居发来的摘要，按照概率模型加以合并，再把更新后的摘要传出去。在树结构上，相应消息不会经过短环回到原处，算法可以得到精确结果。在含环的图上，旧信息却可能绕回原点，被当作独立证据再次计算。

Kirkley、Cantwell 与 Newman 在 2021 年对这个问题取得进展：他们在明确包含短环的邻域上传递更丰富的消息。对于聚集网络上的 Ising 模型等案例，该方法能显著改善计算结果。它的成本会随必须表示的邻域增大，因此，「可以用于树之外的结构」并不等于「能够轻松扩展到每个稠密的含环网络」。较新的张量网络混合方法也作出类似权衡：先更准确地收缩短环区域，再在较稀疏的其余部分使用普通消息传递。

²³信念传播是一种消息传递算法：相邻变量交换由模型规定的摘要，以近似计算或精确计算边缘概率。

图解·局部消息何时变成回声

在树上，传入消息概括的是相互分离的分支；在三角环路上，信息可能返回源头，伪装成新的证据。环路感知方法会表示更多这样的局部依赖。



经典置信传播在满足相应条件的树上可精确工作；短回路会让证据绕回并被重复计算，需要显式修正。

它与 AI 确有联系，但联系并不等于二者相同。消息传递图神经网络²⁴同样逐层聚合邻居信息，属于网络消息传递这一广义的邻域聚合家族，却不等同于信念传播：GNN 通常从数据中学习参数化变换，信念传播则在选定的图模型下传递具有明确概率语义的量。这种共同架构使思想可以在两类方法之间流动，却不能据此把它们归为同一种算法。

前沿 03 ● 邻域聚合 ● 环路修正

同属一个家族，并非同一种算法

经环路修正的信念传播是一项已经发表的技术进展，消息传递 GNN 也是图学习的一类主要架构。未决问题在于规模与迁移：在计算代价过高之前，究竟能够换取多少环路准确度？来自概率消息传递的见解在何时能真正改善学习型图模型，而不只是为其提供一种描述？Bronstein 等人对几何深度学习的综合仍是一篇有影响力的预印本；它适合作为研究纲领，而不是已经经过同行评议、足以统一全部图智能的定理。

²⁴消息传递图神经网络会学习相应函数，在反复迭代的层中变换并聚合相邻节点的信息。

前沿 IV 握住控制杆

结构可控性能够承诺什么，又不能承诺什么

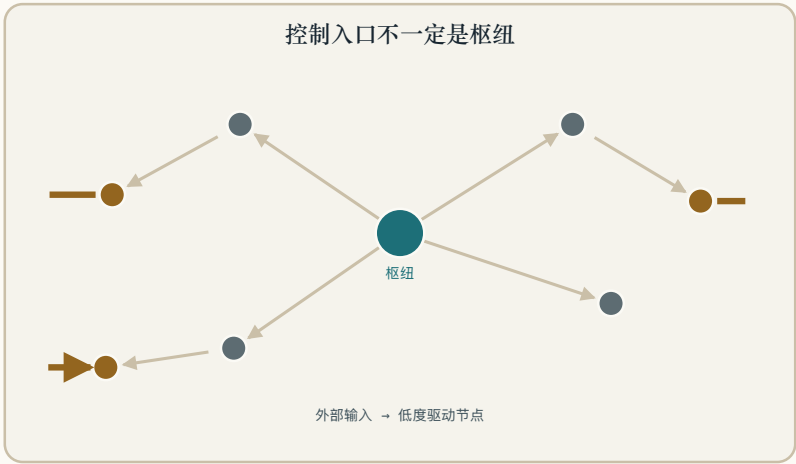
网络控制研究的问题是：对选定节点施加输入，能否引导一个动力系统穿越其状态空间。Liu、Slotine 与 Barabási 在 2011 年研究了形如 $\dot{x} = Ax + Bu$ 的线性系统，其中有向矩阵 A 的零元素与非零元素分布已知，而允许非零的权重按泛型处理。在这些假设下，最大匹配可以确定实现结构可控性所需驱动节点²⁵的最少数量。

这个结果有条件限制，却依然重要，而且有悖直觉：所需的驱动节点未必是枢纽节点。未被匹配的低度节点可能需要直接输入，因为有向结构的其余部分无法独立到达它们。不同的最大匹配可以给出不同的有效驱动节点集合；后来的系综结果则把所需驱动节点的比例与低入度、低出度节点的密度联系起来。

²⁵驱动节点是在特定网络控制模型中接收独立外部控制输入的节点。

图解·驱动节点不一定是枢纽

黄铜色输入指向这个示例有向网络中未匹配的外围节点。该图展示的是最大匹配的直觉，并不是一条普遍规律：不是每个低度节点都是驱动节点，也不是所有枢纽都无关紧要。



在线性结构可控性模型中，所需输入常落在低度、未匹配节点上；可控并不等于现实中低能耗、稳健地可操作。

这使第 9 日的杠杆语言更加精确。结构可控性回答的是某类模型中的可达性问题，并不会自动指出一种容易、廉价、安全或具有社会正当性的干预。即使线性网络在原则上可控，也可能需要巨大的控制能量。细胞、大脑、生态系统和市场还有非线性动力学、不确定的边、部分可观测性、输入约束与不断变化的目标状态。

前沿 04 ● 结构控制 ● 实操操控

模型中的可达性不等于实际控制

最大匹配的结果在其结构线性框架内有坚实的数学基础，却不能证明真实的生物、生态、基础设施或社会网络可以被推至任意目标状态。控制能量、非线性响应、拓扑与权重误差、执行器约束和状态估计误差，都可能使「原则上可达」与「实践中可实现」之间的鸿沟难以跨越。因此，关于控制真实复杂网络的主张，应说明动力学、目标状态、输入约束、能量预算与不确定性，而不能只给出连接图。

前沿 v 作为网络的地球

从单个临界要素到带符号的耦合关系

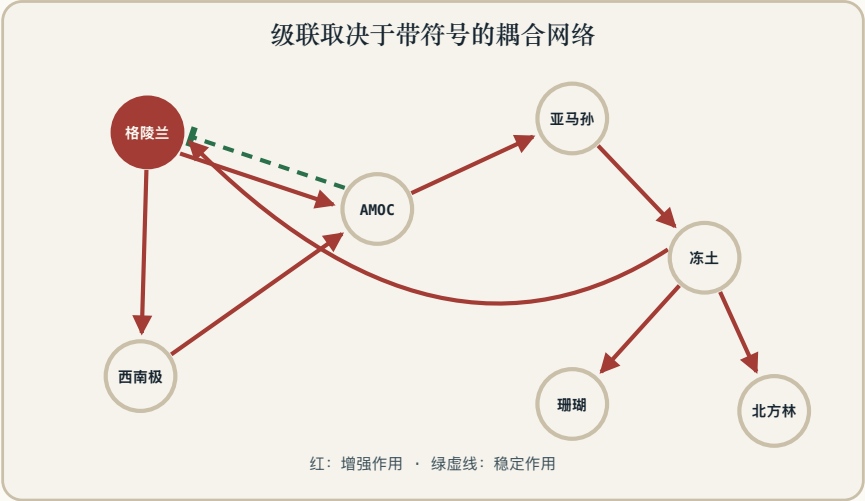
第9日逐一讨论临界要素及其增强反馈。新增的网络问题是：跨过一个阈值，是否会改变另一个要素承受的压力。连接具有方向和正负符号：一种转变可能把相邻要素推向阈值，另一种则可能使它得到部分稳定。

若干物理路径为这类连接提供了依据。格陵兰冰体损失产生的淡水可能削弱大西洋经向翻转环流。减弱的环流可能改变与亚马孙相关的降雨格局；同一环流变化引起的区域降温，又可能部分抵消格陵兰冰体损失。永久冻土释放碳会给整个系统增加变暖压力。但这些机制不足以给出一张完整的邻接矩阵。有些方向的证据强于另一些；连接的符号、强度、阈值和时间尺度仍然不确定，也取决于具体情景。

下方的七节点展示有意采用示意性质。它使用有物理依据的耦合类型，却采用人为设定的教学权重和阈值。节点发生临界转变的顺序不是预报，其连接方式也不是 Wunderling 等人所分析的四要素概念模型。

图·带符号的临界转变级联示意图

红色箭头把目标推向临界转变，绿色钝头连接则施加反向作用。节点阈值和边权重经过选择，以展示路径依赖；它们并不估计温度、日期、概率或某种特定的地球系统未来。



一个要素越过阈值后，增强作用可能把其他要素推近临界点，稳定作用则可能抵消部分压力。连线不预测具体阈值、时间或未来路径。

强制触发的节点	玩具网络中的结果	结构原因	推断边界
格陵兰	一条较长的级联可以依次经过 AMOC、亚马孙、永久冻土、珊瑚礁与北方针叶林。	每一项下游去稳定化输入都达到了示意阈值。	这是人为设计的教学序列，不是格陵兰将引发这一确切级联的预报。
AMOC	下游分支可能发生临界转变，而格陵兰仍未转变。	AMOC 使亚马孙分支失稳，并向格陵兰发送一项稳定化输入。	真实 AMOC 耦合的符号与大小随路径、模型和情景而异。
西南极洲	被强制触发的节点可能保持孤立。	它唯一的向外影响不足以使下一个玩具阈值被跨越。	展示中没有发生级联，不代表这个真实要素不存在风险。
珊瑚礁	级联立即停止。	示意图没有为这个节点设置向外的边。	连接缺失是设计上的简化，不是物理独立的证据。

网络有其合理性，级联却不是时间表

Armstrong McKay 等人在 2022 年重新评估了十六个临界要素。以该评估采用的约 1.1–1.2°C 变暖基线计算，研究判断五个临界点已经可能发生，同时强调阈值范围很宽，响应时间可能从数十年延伸到数千年。Wunderling 等人在 2021 年的概念模型中，把四个要素、相互作用强度和若干可能的连接符号的不确定性纳入传播；在这组模型中，相互作用往往会增加多米诺效应的风险。两项研究都不能为精确的级联次序或日期背书。现有证据能够支持的结论是：相互作用可以改变风险，因而值得显式建模；带符号网络的具体细节仍具有高度不确定性。

前沿 VI 认识边界

算法无法恢复模式的时候

即使生成数据的过程不存在有意义的社区，网络分析也能给出一种划分。更强的结果则是，某些真实存在的结构同样可能无法恢复。在稀疏的植入社区模型中，有些参数区间内的组内连接率与组间连接率过于相似，任何算法都无法以优于随机猜测的表现推断标签。这种可检测性转变是在特定生成假设下的信息极限，并不是宣称现实世界中每个微弱的社区都不可知。

应对方法是使网络分析具有推断性，而不只是装饰性的图形展示。需要明确生成模型，将其与备择模型和零模型比较，对不必要的结构施加惩罚，并报告后验不确定性或抽样不确定性。强制运行社区发现算法，几乎总能得到一些颜色不同的群组；真正的科学问题是，包含这些群组的模型是否比受到适当约束的备择模型更能预测观测到的网络。

这正是相对于前几日内容的推进。第 2 日追问什么证据能够推翻一项主张；第 5 日区分关联与机制；第 10 日区分有用的表征与它所表征的对象。网络推断把三者合在一起：模式、生成模式的模型，以及把该模型与灵活的模式搜寻器区分开的证据。

极限确实存在，其适用范围同样重要

Decelle 等人在稀疏随机块模型的社区推断中识别出一种相变：低于某个信噪边界，在这些假设下便无法从信息论上恢复植入的标签。当假设、度修正、元数据或观测发生变化时，边界也会移动。这项结果应当提高经验社区的举证门槛，而不是终止探索。经过校准的主张是：有些模型具有不可消除的推断极限；与把某种算法的划分当作已经发现的真实情况相比，考虑不确定性的生成模型比较更为稳妥。

前沿记分卡

六项研究纲领，六项未决检验

研究纲领	在适用范围内得到支持	未决检验
高阶网络	考虑群体的模型会产生不同的动力学，并能改善部分预测。	逐案判断：额外的相互作用阶数能否在样本外胜过更简单的成对关系解释。
潜在几何	双曲嵌入能以紧凑方式重现并利用多种网络特征。	确立唯一性，比较不同嵌入家族，并把有用坐标与字面上的物理几何区分开。
消息传递	树结构方法、环路感知扩展和消息传递 GNN 共享一种富有成效的局部计算模式。	扩展准确的环路处理，并证明源自物理学的更新何时能改善学习型图系统。
网络控制	最大匹配可以求解一个定义明确、采用泛型权重的线性模型的结构可控性。	在能量可行、执行器受约束的条件下，控制非线性、不确定且部分可观测的系统。
临界转变级联	物理耦合为带符号网络提供依据，概念模型也表明相互作用可以改变风险。	把阈值、符号、强度与时间尺度约束到足以评估具体级联的程度。
网络推断	特定生成模型具有可检测性极限，并支持考虑不确定性的比较。	区分稳健的经验结构与由方法、抽样或分辨率制造出来的划分。

用三句话概括前沿

核心观点

图并不会中性地原样转录一个系统。选择成对关系还是群体关系、坐标还是邻接关系、局部更新还是控制输入，会改变哪些内容可以被表示、计算和推断。

最佳类比

高阶同步可以把平滑斜坡变成一道有记忆的悬崖：系统可能突然跃迁，而返回路线未必与来路重合。

仍在争论

核心分歧不在于这些方法在数学上是否有趣，而在于：更丰富的结构何时真正捕捉到目标系统中某种会被更简单且经过充分检验的模型遗漏的东西。

此处线索 › 涌现（相互作用阶数的相图与多尺度结构）·信息（扩散、消息传递与可检测性）·计算（图学习与控制）·能量（结构可达性与可行操控之间的差距）·把第 9 日的临界转变线索改写为带符号网络。

从网络走向测量与单位

本附录以依赖模型的阈值、坐标、控制能量与信噪边界收尾。第 13 日将追问：什么使这些量真正成为测量？单位如何定义？操作怎样把数字连接到世界？现代国际单位制又为何把基本单位锚定在自然界的固定常数上？

来源与延伸阅读

除非明确标为预印本，以下文献均经过同行评议。若某项前沿研究依赖奠基性成果，则收入 2020 年以前的论文。

1. Battiston, F., Cencetti, G., Iacopini, I., Latora, V., Lucas, M., Patania, A., Young, J.-G. & Petri, G. (2020). "Networks beyond pairwise interactions: Structure and dynamics." *Physics Reports* 874: 1–92. doi.org/10.1016/j.physrep.2020.05.004
2. Battiston, F. et al. (2021). "The physics of higher-order interactions in complex systems." *Nature Physics* 17: 1093–1098. doi.org/10.1038/s41567-021-01371-4
3. Boccaletti, S., De Lellis, P., del Genio, C. I., Alfaro-Bittner, K., Criado, R., Jalan, S. & Romance, M. (2023). "The structure and dynamics of networks with higher order interactions." *Physics Reports* 1018: 1–64. doi.org/10.1016/j.physrep.2023.04.002 Bianconi, G. (2021). *Higher-Order Networks*. Cambridge University Press. doi.org/10.1017/9781108770996
4. Skardal, P. S. & Arenas, A. (2020). "Higher order interactions in complex networks of phase oscillators promote abrupt synchronization switching." *Communications Physics* 3: 218. doi.org/10.1038/s42005-020-00485-0 Millán, A. P., Torres, J. J. & Bianconi, G. (2020). "Explosive Higher-Order Kuramoto Dynamics on Simplicial Complexes." *Physical Review Letters* 124: 218301. doi.org/10.1103/PhysRevLett.124.218301 Gambuzza, L. V. et al. (2021). "Stability of synchronization in simplicial complexes." *Nature Communications* 12: 1255. doi.org/10.1038/s41467-021-21486-9
5. Millán, A. P. et al. (2025). "Topology shapes dynamics of higher-order networks." *Nature Physics* 21: 353–361. doi.org/10.1038/s41567-024-02757-w
6. Bian, J., Zhou, T. & Bi, Y. (2025). "Unveiling the role of higher-order interactions via stepwise reduction." *Communications Physics* 8: 228. 在所研究的十二个网络与预测任务中，高阶信息带来的收益并不相同。doi.org/10.1038/s42005-025-02157-3
7. Boguñá, M., Bonamassa, I., De Domenico, M., Havlin, S., Krioukov, D. & Serrano, M. Á. (2021). "Network geometry." *Nature Reviews Physics* 3: 114–135. doi.org/10.1038/s42254-020-00264-4
8. Krioukov, D., Papadopoulos, F., Kitsak, M., Vahdat, A. & Boguñá, M. (2010). "Hyperbolic geometry of complex networks." *Physical Review E* 82: 036106. doi.org/10.1103/PhysRevE.82.036106
9. García-Pérez, G., Boguñá, M. & Serrano, M. Á. (2018). "Multiscale unfolding of real networks by geometric renormalization." *Nature Physics* 14: 583–589. doi.org/10.1038/s41567-018-0072-5
10. Zheng, M., Allard, A., Hagmann, P., Alemán-Gómez, Y. & Serrano, M. Á. (2020). "Geometric renormalization unravels self-similarity of the multiscale human connectome." *Proceedings of the National Academy of Sciences* 117: 20244–20253. doi.org/10.1073/pnas.1922248117 van der Kolk, J., Serrano, M. Á. & Boguñá, M. (2024). "Random graphs and real networks with weak geometric coupling." *Physical Review Research* 6: 013337. doi.org/10.1103/PhysRevResearch.6.013337
11. Villegas, P., Gili, T., Caldarelli, G. & Gabrielli, A. (2023). "Laplacian renormalization group for heterogeneous networks." *Nature Physics* 19: 445–450. doi.org/10.1038/s41567-022-01866-8

12. Cantwell, G. T. & Newman, M. E. J. (2019). "Message passing on networks with loops." *Proceedings of the National Academy of Sciences* 116: 23398–23403. doi.org/10.1073/pnas.1914893116 Kirkley, A., Cantwell, G. T. & Newman, M. E. J. (2021). "Belief propagation for networks with loops." *Science Advances* 7: eabf1211. doi.org/10.1126/sciadv.abf1211
13. Newman, M. E. J. (2023). "Message passing methods on complex networks." *Proceedings of the Royal Society A* 479: 20220774. doi.org/10.1098/rspa.2022.0774
14. Wang, Y., Zhang, Y. E., Pan, F. & Zhang, P. (2024). "Tensor Network Message Passing." *Physical Review Letters* 132: 117401. doi.org/10.1103/PhysRevLett.132.117401
15. Bronstein, M. M., Bruna, J., Cohen, T. & Veličković, P. (2021). "Geometric Deep Learning: Grids, Groups, Graphs, Geodesics, and Gauges."有影响力的预印本, arXiv:2104.13478; 未经同行评议。arxiv.org/abs/2104.13478
16. Liu, Y.-Y., Slotine, J.-J. & Barabási, A.-L. (2011). "Controllability of complex networks." *Nature* 473: 167–173. doi.org/10.1038/nature10011
17. Menichetti, G., Dall'Asta, L. & Bianconi, G. (2014). "Network controllability is determined by the density of low in-degree and out-degree nodes." *Physical Review Letters* 113: 078701. doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.078701
18. Yan, G., Ren, J., Lai, Y.-C., Lai, C.-H. & Li, B. (2012). "Controlling complex networks: How much energy is needed?" *Physical Review Letters* 108: 218703. doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.218703
19. D'Souza, R. M., di Bernardo, M. & Liu, Y.-Y. (2023). "Controlling complex networks with complex nodes." *Nature Reviews Physics* 5: 250–262. doi.org/10.1038/s42254-023-00566-3
20. Armstrong McKay, D. I. et al. (2022). "Exceeding 1.5°C global warming could trigger multiple climate tipping points." *Science* 377: eabn7950. doi.org/10.1126/science.abn7950
21. Wunderling, N., Donges, J. F., Kurths, J. & Winkelman, R. (2021). "Interacting tipping elements increase risk of climate domino effects under global warming." *Earth System Dynamics* 12: 601–619. 这是一个包含四项要素的概念网络, 阈值、相互作用强度与结构的不确定性均被纳入传播。doi.org/10.5194/esd-12-601-2021
22. Lenton, T. M. et al. (2008). "Tipping elements in the Earth's climate system." *Proceedings of the National Academy of Sciences* 105: 1786–1793. doi.org/10.1073/pnas.0705414105
23. Decelle, A., Krzakala, F., Moore, C. & Zdeborová, L. (2011). "Inference and phase transitions in the detection of modules in sparse networks." *Physical Review Letters* 107: 065701. doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.065701
24. Peixoto, T. P. (2019). "Bayesian stochastic blockmodeling." In Doreian, P., Batagelj, V. & Ferligoj, A., eds., *Advances in Network Clustering and Blockmodeling*, pp. 289–332. Wiley. arxiv.org/abs/1705.10225